信号与系统

零基础学习笔记

这份笔记假设读者没有高等数学、复数、微积分和线性代数基础。所有新符号都先解释，再使用。

目录

1. 学习路线 3
2. 函数与信号 3
   - 2.1. 函数是什么 3
   - 2.2. 信号是什么 3
   - 2.3. 连续时间信号与离散时间信号 4
   - 2.4. 采样 4
   - 2.5. ADC 4
   - 2.6. 信号的时间平移 4
   - 2.7. 信号的时间翻转 5
   - 2.8. 信号的时间缩放 5
   - 2.9. 单位阶跃信号 5
   - 2.10. 用阶跃信号拼出矩形脉冲 5
3. 积分与冲激信号 6
   - 3.1. 积分的直觉 6
   - 3.2. 单位冲激信号 6
   - 3.3. 冲激和平移 6
   - 3.4. 冲激与阶跃的关系 7
   - 3.5. 筛选性质 7
4. LTI、冲激响应与卷积 7
   - 4.1. 冲激响应 7
   - 4.2. LTI 系统 7
     - 4.2.1. 什么是线性 7
     - 4.2.2. 什么是时不变 8
     - 4.2.3. 为什么“线性 + 时不变”特别重要 8
   - 4.3. 信号可以拆成冲激 8
   - 4.4. 为什么出现 h(t-tau) 8
   - 4.5. 卷积从哪里来 9
   - 4.6. 卷积本身并不要求冲激信号 9
   - 4.7. 当前输出是否依赖上一个输出 9
   - 4.8. 一个最简单的离散卷积 10
   - 4.9. 有限序列与定义域 10
   - 4.10. 连续卷积为什么用积分 10
5. 正弦波、周期、频率与相位 11
   - 5.1. 周期与频率 11
   - 5.2. 为什么有 2π 11
   - 5.3. 振幅与相位 11
   - 5.4. 相位与时间平移 11
6. 系统性质与频率响应 12
   - 6.1. 因果性 12
   - 6.2. 稳定性 12
   - 6.3. 频率响应 12
   - 6.4. h(t) 与 H(f) 12

6.5. 卷积定理 13
6.6. 一个简单的频域滤波例子 13
6.7. FIR 与 IIR 14
7. 时域、频域与傅里叶变换 14
7.1. 时域 14
7.2. 频域 14
7.3. 傅里叶变换在做什么 15
7.4. 它怎么判断有没有某个频率 15
7.5. 为什么还需要余弦 15
7.6. 傅里叶公式的直觉 15
7.7. 幅度谱与相位谱 16
7.8. 相位的物理意义 16
7.9. 实际计算为什么需要一段时间 16
8. 欧拉公式、DFT 与 FFT 17
8.1. 角度、theta 与弧度 17
8.2. 复数与虚数单位 i 17
8.3. 乘 i 的几何意义 18
8.4. 单位圆与 sin、cos 18
8.5. 常数 e 18
8.6. 欧拉公式 18
8.7. 它为什么会出现在傅里叶变换里 19
8.8. DFT 19
8.9. N、n 与 k 19
8.10. 频率格子 20
8.11. DFT 如何匹配每个频率 20
8.12. DFT 的输出是什么 20
8.13. FFT 21
8.14. 傅里叶逆变换 21
8.15. IDFT 与 IFFT 21
9. 采样、Nyquist 与混叠 22
9.1. 从连续信号到离散样本 22
9.2. Nyquist 频率 22
9.3. 为什么采样率太低会出问题 22
9.4. Aliasing：混叠 22
9.5. 抗混叠滤波器 23
9.6. RC 低通滤波器 23

1. 学习路线

信号与系统的核心关系可以先记成：

输入信号 → 系统 → 输出信号

我们按下面的顺序学习：

1. 函数、坐标轴与图像
2. 什么是信号
3. 连续信号与离散信号
4. 什么是系统
5. 正弦波与周期
6. 复数与欧拉公式
7. 傅里叶级数
8. 傅里叶变换
9. DFT 与 FFT
10. 卷积
11. LTI 系统
12. 频率响应
13. 采样、奈奎斯特与混叠
14. 拉普拉斯变换

每一章只引入当前真正需要的数学工具。

2. 函数与信号

2.1. 函数是什么

函数可以先理解成一个规则：给它一个输入，它按照固定规则给出一个输出。

例如：

$$y = 2x$$

当 $x = 1$ 时，$y = 2$；当 $x = 3$ 时，$y = 6$。

也可以写成：

$$y = f(x)$$

这里的 f 表示“从输入 x 得到输出 y 的规则”。

2.2. 信号是什么

在信号与系统里，一个最常见的信号写成：

$$x(t)$$

这里不是 x 乘以 t。它表示：x 是一个函数，输入是时间 t。

因此，$x(t)$ 可以读成：“信号 x 在时间 t 时的值”。

例如：

$$x(t) = 2t$$

那么：

- $x(0) = 0$
- $x(1) = 2$
- $x(2) = 4$

很多物理量都随时间变化，例如声音、传感器电压、温度。因此可以先记住：

信号通常就是一个随时间变化的函数。

2.3. 连续时间信号与离散时间信号

连续时间信号通常写成：

$$x(t)$$

这里的时间 t 可以取任意实数，例如 0、0.1、0.123、1。

离散时间信号通常写成：

$$x[n]$$

这里的 n 通常只取整数：$0, 1, 2, 3, ...$。

因此：

- $x(t)$：连续时间信号。
- $x[n]$：离散时间信号。

2.4. 采样

现实世界中的声音、电压等通常先表现为连续信号 $x(t)$。计算机处理时，需要按固定时间间隔取样，把它变成离散序列 $x[n]$。

如果每隔 T_s 秒采一次，则：

$$x[n] = x(nT_s)$$

这里 T_s 叫做**采样间隔**。

采样频率记作 f_s：

$$f_s = \frac{1}{T_s}$$

例如 $T_s = 0.001$ 秒，则：

$$f_s = 1000 \ \ \text{Hz}$$

意思是每秒采 1000 个点。

2.5. ADC

ADC 是 Analog-to-Digital Converter，中文叫**模数转换器**。

它负责把连续的模拟电压变成计算机能够保存和处理的数字数据。

可以先把它理解成两步：

- **采样**：隔一段时间测一次电压。
- **量化**：把测到的电压映射到有限的数字等级。

因此常见的数据链路是：

模拟信号 → ADC → 数字序列

反过来，把数字信号变回模拟电压的设备叫 DAC（Digital-to-Analog Converter，数模转换器）。

2.6. 信号的时间平移

$$x(t - a)$$

表示把原信号向右移动 a。

例如 $x(t - 1)$ 表示向右移动 1 秒。

而：

$$x(t+a)$$

表示向左移动 a。

最容易搞反，所以先记：

- 减号：右移。
- 加号：左移。

2.7. 信号的时间翻转

$$x(-t)$$

表示沿时间轴左右翻转。

例如原来位于 $t=2$ 的特征，会移动到 $t=-2$。

注意不要和下面这个混淆：

$$-x(t)$$

- $x(-t)$：左右翻。
- $-x(t)$：上下翻。

2.8. 信号的时间缩放

$$x(2t)$$

表示时间轴压缩 2 倍。原来出现在 $t=2$ 的特征会出现在 $t=1$。

而：

$$x\left(\frac{t}{2}\right)$$

表示时间轴拉伸 2 倍。原来出现在 $t=2$ 的特征会出现在 $t=4$。

因此可以先记：

- $x(2t)$：更快。
- $x(\frac{t}{2})$：更慢。

2.9. 单位阶跃信号

单位阶跃信号写成：

$$u(t)$$

它表示一个在 $t=0$ 打开的理想开关：

- 当 $t<0$ 时，$u(t)=0$。
- 当 $t\geq 0$ 时，$u(t)=1$。

如果写成：

$$u(t-a)$$

它就在 $t=a$ 时打开。

例如：

$$u(t-2)$$

表示到 2 秒时才从 0 变成 1。

2.10. 用阶跃信号拼出矩形脉冲

考虑：

$$x(t) = u(t) - u(t-2)$$

分三段看：

- $t < 0$：$0 - 0 = 0$。
- $0 \le t < 2$：$1 - 0 = 1$。
- $t \ge 2$：$1 - 1 = 0$。

因此它表示一个从 $t = 0$ 开始、到 $t = 2$ 结束的矩形脉冲。

更一般地：

$$u(t-a) - u(t-b)$$

可以理解为：在 $t = a$ 时打开，在 $t = b$ 时关闭。

3. 积分与冲激信号

3.1. 积分的直觉

现阶段可以先把积分理解成：

把很多很小的贡献累加起来。

例如：

$$\int_0^3 2 \, \mathrm{d}t = 6$$

因为函数值始终为 2，从 0 到 3 的面积就是：

$$2 \times 3 = 6$$

因此定积分可以直观理解为“带正负号的面积累加”。

横轴上方的面积记为正，横轴下方的面积记为负。

3.2. 单位冲激信号

单位冲激信号写成：

$$\delta(t)$$

可以把它理解成发生在某一个瞬间的理想化冲击。

它满足：

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

同时：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \, \mathrm{d}t = 1$$

需要注意：等于 1 的是冲激的总面积，而不是说 $\delta(0) = 1$。

3.3. 冲激和平移

$$\delta(t-a)$$

表示冲激发生在 $t = a$。

例如：

$$\delta(t-3)$$

表示在 3 秒时发生一个单位冲激。

3.4. 冲激与阶跃的关系
如果从负无穷开始累积冲激：

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = u(t)$$

也就是说，在经过冲激之前累计结果为 0，经过冲激之后累计结果为 1。

3.5. 筛选性质
冲激函数最重要的性质之一是：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-a)\,\mathrm{d}t = x(a)$$

可以把 $\delta(t-a)$ 理解成一根“取样针”：它让积分只保留 $t=a$ 附近的贡献。

由于单位冲激的总面积是 1，所以最后得到：

$$x(a)\times 1 = x(a)$$

例如，如果：

$$x(t) = 2t$$

那么：

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2t\delta(t-3)\,\mathrm{d}t = 6$$

现阶段可以先记住：

积分 = 累加；冲激 = 瞬时探针；冲激配合积分可以取出函数在某一个时刻的值。

4. LTI、冲激响应与卷积
4.1. 冲激响应
把单位冲激输入一个系统：

$$\delta(t) \to h(t)$$

输出 $h(t)$ 叫做系统的冲激响应（Impulse Response）。可以把它理解成：给系统瞬间“敲一下”，观察系统之后怎样反应。

“系统”不一定是计算机程序，也可以是机械、电路、房间、传感器、滤波器等。分析时可以把它视为黑盒，只关心输入与输出。

4.2. LTI 系统
LTI 是 Linear Time-Invariant，中文是“线性时不变”。

4.2.1. 什么是线性
线性的核心是两件事：保持加法，保持数乘。

如果系统记作 T，那么线性系统满足：

$$T(ax_1 + bx_2) = aT(x_1) + bT(x_2)$$

也就是说，多个输入可以分开处理，再把各自输出相加；输入放大多少倍，输出也按同样倍数放大。

这与线性代数里的“线性”是同一个数学概念。区别只是线性代数通常处理向量，而信号与系统里处理的对象常常是一整个函数或序列。

例如：

$$y(t) = 2x(t)$$

是线性的。

而：

$$y(t) = x(t)^2$$

不是线性的，因为一般有：

$$(x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2$$

4.2.2. 什么是时不变

时不变表示：系统的行为不会因为输入发生的时间不同而改变。

如果：

$$x(t) \to y(t)$$

那么把输入整体延迟 a：

$$x(t-a)$$

输出也只会整体延迟同样的时间：

$$y(t-a)$$

例如，如果：

$$\delta(t) \to h(t)$$

那么时不变系统一定满足：

$$\delta(t-a) \to h(t-a)$$

4.2.3. 为什么“线性 + 时不变”特别重要

线性负责“能相加”，时不变负责“能平移复用”。

因此，如果已经知道：

$$\delta(t) \to h(t)$$

那么就立即知道：

$$A\delta(t-a) \to Ah(t-a)$$

这使得一个冲激响应 $h(t)$ 可以被反复缩放和平移，用来构造系统对复杂输入的输出。

4.3. 信号可以拆成冲激

离散信号可以写成许多不同位置、不同大小的冲激之和。

例如：

$$x[n] = 2\delta[n] + 5\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

连续信号也有同样的思想：普通信号可以理解成无数个不同时间位置的冲激叠加。

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

这里 τ 只是积分时使用的临时时间变量。

4.4. 为什么出现 h(t-tau)

如果一个冲激发生在 $t = 0$，响应是 $h(t)$。

如果这个冲激晚 τ 时刻发生，因为系统时不变，响应也整体晚 τ：

$$h(t-\tau)$$

所以 $x(\tau)h(t-\tau)$ 表示：在 τ 时刻大小为 $x(\tau)$ 的输入，产生的一份缩放并延迟后的响应。

4.5. 卷积从哪里来

对于 LTI 系统，每一个输入冲激都会产生一份平移并缩放后的冲激响应。把所有这些响应加起来，就是最终输出。

离散时间：

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

连续时间：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

记作：

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

因此在 LTI 系统这个场景里，可以把卷积直观理解成：

把每个输入点产生的冲激响应全部叠加起来。

教材中常见的“翻转、平移、相乘、求和”是卷积公式的图形计算方法，不是它最本质的物理含义。

4.6. 卷积本身并不要求冲激信号

卷积本身只是两个函数或两个序列之间的一种数学运算，并不天然等于“用冲激探测黑盒”。

更一般地，可以写成：

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

这里的 f 和 g 都可以是普通函数或普通信号，并不要求其中一个是冲激信号。

在 LTI 系统里，h 之所以特殊，是因为它恰好是系统的冲激响应，所以：

$$y=x*h$$

可以用来计算系统对输入 x 的输出。

因此要区分三件事：

- $\delta(t)$：可以用来探测一个 LTI 系统；
- $h(t)$：探测后得到的冲激响应，它描述这个 LTI 系统；
- $x*h$：利用这个系统特性计算输出。

卷积也可以出现在没有“黑盒系统”或没有冲激信号的场景中。

4.7. 当前输出是否依赖上一个输出

卷积本身不要求当前输出依赖上一个输出。

例如设：

$$h[n]=[1,0.5]$$

那么：

$$y[7]=x[7]h[0]+x[6]h[1]$$

也就是：

$$y[7] = x[7] + 0.5x[6]$$

这里 $y[7]$ 确实依赖过去的输入 $x[6]$，因为过去输入产生的影响还没有消失。

但它并不依赖 $y[6]$。

所以更准确的说法是：

如果冲激响应持续多个时刻，那么当前卷积输出会依赖当前和过去的输入。

只有递归系统才可能直接依赖过去输出，例如：

$$y[n] = 0.8y[n-1] + x[n]$$

这种式子中的 $y[n]$ 才明确依赖 $y[n-1]$。

4.8. 一个最简单的离散卷积

设：

$$x[n] = [1, 2]$$

$$h[n] = [1, 1]$$

第一个输入点 $x[0] = 1$ 产生响应：

$$[1, 1, 0]$$

第二个输入点 $x[1] = 2$ 晚一个时刻发生，产生响应：

$$[0, 2, 2]$$

叠加后：

$$y[n] = [1, 3, 2]$$

因此完整卷积的结果长度为：

$$N + M - 1$$

其中 N 和 M 是两个有限序列的长度。

直观上，结果变长是因为每个输入点都会“拖出”一段 $h[n]$。如果系统的冲激响应持续多个时刻，那么最后一个输入结束后，系统还可能继续有余波。

4.9. 有限序列与定义域

理论上的离散时间信号通常定义在整个整数轴：

$$n \in \mathbb{Z}$$

实际计算时往往只观察有限一段，或者默认有限序列之外的值全部为零。

所以“序列点数更多”表示输入持续时间更长或观测区间更长，并不自动意味着卷积更准确。

4.10. 连续卷积为什么用积分

离散时间中，我们把每一个输入点产生的响应用求和加起来：

$$\sum_k x[k]h[n-k]$$

连续时间中，时间位置无限密集，因此“连续地求和”就变成积分：

$$\int x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

所以可以把积分理解成连续版本的求和。

5. 正弦波、周期、频率与相位

5.1. 周期与频率

最基本的正弦波可以写成：

$$x(t) = \sin(2\pi f t)$$

其中 f 是频率，单位是 Hz，表示每秒重复多少次。

如果 $f = 2$ Hz，就表示每秒重复 2 次。

周期 T 表示完成一次重复需要多久：

$$T = \frac{1}{f}$$

因此：

- f 越大，变化越快。
- T 越大，重复一次所需时间越长。

5.2. 为什么有 2π

正弦函数走完一个完整周期，对应角度从 0 变化到 2π。

因此如果每秒需要重复 f 次，角度每秒就要前进 $2\pi f$。

常把：

$$\omega = 2\pi f$$

称为角频率，所以正弦波也可以写成：

$$x(t) = \sin(\omega t)$$

5.3. 振幅与相位

更完整的正弦波形式是：

$$x(t) = A\sin(2\pi f t + \varphi)$$

其中：

- A 是振幅，决定波形有多大。
- f 是频率，决定波形变化有多快。
- φ 是相位，决定波形从周期中的哪个位置开始。

可以先记成：

振幅决定多大，频率决定多快，相位决定从哪里开始。

5.4. 相位与时间平移

如果把正弦波整体向右移动 t_0 秒：

$$x(t - t_0) = \sin(2\pi f(t - t_0))$$

展开后：

$$\sin(2\pi f t - 2\pi f t_0)$$

因此相位与时间平移满足：

$$\varphi = -2\pi f t_0$$

也就是说，相位变化可以理解成波形在时间轴上的平移。

一个完整周期 T 对应相位变化 2π，所以：

- 半个周期 $\frac{T}{2}$ 对应 π。
- 四分之一个周期 $\frac{T}{4}$ 对应 $\frac{\pi}{2}$。

6. 系统性质与频率响应

6.1. 因果性

因果系统的当前输出只能依赖现在和过去的输入，不能依赖未来输入。

例如：

$$y(t) = x(t) + x(t-1)$$

是因果系统，因为只使用当前输入和过去输入。

而：

$$y(t) = x(t+1)$$

不是因果系统，因为当前输出需要知道未来 1 秒的输入。

对于 LTI 系统，因果性可以通过冲激响应判断：

$$h(t) = 0 \quad \text{for} \quad t < 0$$

直观上就是：系统在被冲激之前不能提前产生响应。

6.2. 稳定性

稳定性可以先理解成：有限的输入不应该导致无限大的输出。

如果输入始终有界，而系统输出却不断增大到没有上限，那么这个系统是不稳定的。

6.3. 频率响应

给 LTI 系统输入一个正弦波：

$$A\sin(2\pi f t + \varphi)$$

输出仍然具有相同的频率 f，但振幅和相位可能改变。

例如：

$$\sin(2\pi 10t) \to 0.3\sin(2\pi 10t + \theta)$$

频率仍然是 10 Hz。

因此，可以用不同频率的正弦波测试系统，记录每个频率被放大或衰减多少、相位改变多少。系统对所有频率的这种响应，就是频率响应。

频率响应回答的问题是：

- 哪些频率容易通过?
- 哪些频率会被衰减?
- 不同频率会产生多少相位变化?

例如，低通滤波器会较多保留低频，同时衰减高频。

傅里叶分析把复杂信号拆成很多不同频率的正弦成分，频率响应则描述系统如何分别处理这些频率成分。

因此可以把处理过程理解成：

复杂信号 → 分解成各个频率 → 系统分别处理 → 再叠加回来

6.4. h(t) 与 H(f)

对于 LTI 系统，$h(t)$ 是系统的冲激响应，也就是系统在时域里的描述。

对 $h(t)$ 做傅里叶变换：

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$$

就得到系统的频率响应 $H(f)$。

因此：

$$h(t) \leftrightarrow H(f)$$

它们描述的是同一个 LTI 系统，只是观察角度不同。

$h(t)$ 回答的是：

给系统一个瞬时冲激以后，系统随时间怎样响应？

$H(f)$ 回答的是：

不同频率进入系统后，会被放大或衰减多少，相位会改变多少？

可以把它们先记成：

- $h(t)$：系统的时域说明书；
- $H(f)$：系统的频域说明书。

6.5. 卷积定理

对于 LTI 系统，时域中的输入输出关系是：

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

对等式两边做傅里叶变换，会得到：

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

因此：

$$x * h \leftrightarrow XH$$

也就是说：

时域里的卷积，等价于频域里的逐频率相乘。

如果某个频率处：

$$H(f) \approx 1$$

说明该频率基本保留。

如果：

$$H(f) \approx 0$$

说明该频率被强烈衰减。

所以频率响应 $H(f)$ 可以理解成系统对每一个频率分别设置的“幅度旋钮 + 相位旋钮”。

6.6. 一个简单的频域滤波例子

假设输入包含 100 Hz 和 1000 Hz 两个频率，并且它们的幅度都是 1。

若一个低通系统满足：

$$H(100) = 1$$

$$H(1000) = 0.2$$

那么经过系统后，100 Hz 基本保留，而 1000 Hz 只剩原来的 20%。

在频域里，这就是：

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

在时域里，同一件事写成：

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

两种写法描述的是同一个系统作用过程。

6.7. FIR 与 IIR

FIR 是 Finite Impulse Response，中文是“有限冲激响应”。

例如：

$$y[n] = x[n] + 0.5x[n-1]$$

它只依赖当前和过去的输入，对应的冲激响应是：

$$h[n] = [1, 0.5]$$

冲激响应只有有限个非零值，所以叫 FIR。

IIR 是 Infinite Impulse Response，中文是“无限冲激响应”。

例如：

$$y[n] = x[n] + 0.8y[n-1]$$

这里当前输出依赖上一次输出，因此这是递归实现。

如果给这个系统一个单位冲激，它的冲激响应会持续下去：

$$h[n] = 1, 0.8, 0.8^2, 0.8^3, ...$$

所以称为 IIR。

要注意：

卷积本身不等于递归。

FIR 可以直接通过卷积实现；IIR 虽然常用递归公式实现，但如果它是 LTI 系统，仍然可以从理论上写成：

$$y = x * h$$

只是它的 h 会无限延续。

7. 时域、频域与傅里叶变换

7.1. 时域

时域关注的是：信号在不同时间点的值是什么。

如果一个信号写成 $x(t)$，横轴通常是时间 t，纵轴是信号值。

时域最擅长回答：

- 什么时候出现变化?
- 什么时候振幅变大或变小?
- 信号随时间是什么形状?

可以先记成：

时域 = 看“什么时候发生了什么”。

7.2. 频域

频域关注的是：一个复杂信号由哪些频率组成，每个频率有多强。

例如，一个复杂声音可能同时包含 100 Hz、440 Hz 和 1000 Hz。

因此可以这样理解：

- 时域：什么时候发生了什么。
- 频域：里面包含哪些频率，以及每种频率有多强。

同一个信号可以写成时域形式 $x(t)$，也可以写成频域形式 $X(f)$。它们不是两个不同的信号，而是同一个信号的两种观察方式。

7.3. 傅里叶变换在做什么

傅里叶变换把同一个信号从时域表示转换成频域表示。

它的核心思想是：复杂信号可以拆成许多不同频率的正弦波和余弦波。

因此：

时域信号 → 傅里叶变换 → 频域表示

频域表示 → 傅里叶逆变换 → 时域信号

可以把傅里叶变换先理解成“频率分解器”。

7.4. 它怎么判断有没有某个频率

直观上，可以把傅里叶分析理解成：拿不同频率的标准波形和原信号逐个做匹配。

例如，要判断一个信号里有没有 100 Hz，就拿 100 Hz 的正弦波与原信号比较。如果同频成分很强，长期累加后的匹配结果会比较大；如果频率不匹配，正负贡献会大量互相抵消。

因此可以先理解成：

傅里叶变换会对不同频率逐个询问“你在原信号里有多少”。

7.5. 为什么还需要余弦

只用一个正弦波还不够，因为同一个频率可以有不同相位。

例如：

$$\sin(2\pi ft)$$

和：

$$\cos(2\pi ft)$$

频率相同，只是相位相差四分之一个周期。

任意相位的同频正弦波都可以由同频的正弦和余弦组合出来：

$$A\sin(\omega t+\varphi)=A\cos(\varphi)\sin(\omega t)+A\sin(\varphi)\cos(\omega t)$$

所以同时观察“正弦方向”和“余弦方向”，就能同时获得：

- 这个频率有多强；
- 这个频率的相位是多少。

这也是后面欧拉公式会自然出现的原因：它可以把正弦和余弦统一写在一个复指数里。

7.6. 傅里叶公式的直觉

连续时间傅里叶变换写成：

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i2\pi ft}\,\mathrm{d}t$$

这里 f 表示当前正在检测的频率。

$e^{-i2\pi ft}$ 可以理解为一个以 f Hz 旋转的反向复数探针。把它与原信号相乘并在时间上累加：

- 如果原信号里存在同频成分，旋转会被抵消，累加结果较大；
- 如果频率不同，结果仍会旋转，长期累加时会大量互相抵消。

因此，对固定的一个 f，傅里叶变换得到一个频谱值 $X(f)$；把所有频率的结果放在一起，就得到整个频域表示 $X(f)$。

7.7. 幅度谱与相位谱

$X(f)$ 通常是复数，因此它同时包含两个信息：

- 幅度：这个频率成分有多强；
- 相位：这个频率成分在一个周期里的位置。

幅度谱通常写成：

$$|X(f)|$$

横轴是频率 f，纵轴表示不同频率成分的大小。

相位谱通常写成：

$$\angle(X(f))$$

横轴仍然是频率，纵轴表示每个频率对应的相位。

例如：

$$x(t) = 2\cos(2\pi 100t) + \cos\left(2\pi 300t + \frac{\pi}{4}\right)$$

可以直观理解为：

- 100 Hz：幅度为 2，相位为 0；
- 300 Hz：幅度为 1，相位为 $\frac{\pi}{4}$，也就是 45°。

7.8. 相位的物理意义

相位不是纯抽象概念。对于周期信号，它表示“当前处在一个周期的什么位置”。

一般正弦信号可以写成：

$$x(t) = A\cos(2\pi ft + \varphi)$$

其中 φ 就是相位。

相位与时间偏移直接对应。若：

$$x(t) = \cos(2\pi f(t - t_0))$$

展开可得：

$$x(t) = \cos(2\pi ft - 2\pi ft_0)$$

所以：

$$\varphi = -2\pi ft_0$$

也就是：

$$t_0 = -\frac{\varphi}{2\pi f}$$

因此，相位差可以理解成两个同频周期信号之间的时间错位。

例如 100 Hz 的周期是 10 ms。若相位相差 90°，也就是四分之一个周期，则时间差为 2.5 ms。

7.9. 实际计算为什么需要一段时间

理论上的傅里叶变换可以讨论整个时间轴，但真实计算机只能拿到有限长度的数据。

假设我们观察信号的总时长是 T，那么频率分辨率大致为：

$$\Delta f = \frac{1}{T}$$

所以观察时间越长，通常越容易区分两个非常接近的频率。

如果采样率是 f_s，一共采样 N 个点，则：

$$T = \frac{N}{f_s}$$

因此：

$$\Delta f = \frac{f_s}{N}$$

8. 欧拉公式、DFT 与 FFT

8.1. 角度、theta 与弧度

θ（theta）通常用来表示角度。

角度既可以用“度”表示，也可以用“弧度”表示。

弧度的定义是：

$$\theta = \frac{s}{r}$$

其中 s 是圆弧长度，r 是半径。

因为整圆周长为：

$$2\pi r$$

所以整圆对应的弧度为：

$$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

因此：

$$360^\circ = 2\pi$$

$$180^\circ = \pi$$

$$90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

$$45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

角度换算：

$$\text{弧度} = \text{度数} \times \frac{\pi}{180}$$

如果用度数 α 表示圆心角，弧长为：

$$s = 2\pi r \times \frac{\alpha}{360}$$

如果用弧度 θ 表示，则因为 $\theta = \frac{s}{r}$，所以：

$$s = r\theta$$

8.2. 复数与虚数单位 i

普通实数中，没有一个数的平方等于 -1。

因此定义虚数单位：

$$i^2 = -1$$

形如：

$$a + bi$$

的数叫复数。

复数可以看成二维平面上的点：实部 a 是横坐标，虚部系数 b 是纵坐标。

例如：

$$3 + 2i$$

对应平面上的点 $(3, 2)$。

8.3. 乘 i 的几何意义

在复平面上，乘一次 i 等价于逆时针旋转 $90°$。

因为：

$$1 \to i \to -1 \to -i \to 1$$

每一步都相当于再旋转四分之一圈。

所以可以先把 i 理解成一个“旋转 $90°$ 的操作”。

8.4. 单位圆与 sin、cos

半径为 r、角度为 θ 的圆上点可以写成：

$$x = r\cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\theta)$$

因此：

$$P = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

当 $r = 1$ 时得到单位圆：

$$P = (\cos(\theta), \sin(\theta))$$

复数 $a + bi$ 对应二维坐标 (a, b)，所以单位圆上的同一个点也可以写成：

$$\cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

它表示“从正实轴出发，逆时针旋转 θ 后的位置”。

8.5. 常数 e

e 是一个特殊常数：

$$e \approx 2.71828$$

它经常出现在连续增长问题中，例如：

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

当 n 越来越大时，会越来越接近 e。

指数函数 e^x 有一个重要性质：它的变化速度等于它自己。

8.6. 欧拉公式

欧拉公式是：

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

右边 $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ 表示单位圆上旋转 θ 后的位置。

而 $e^{i\theta}$ 也描述同一个旋转，因此两者相等。

可以先把它直观地记成：

$$e^{i\theta} = \text{在复平面上旋转 } \theta$$

当角度为负数时，就是顺时针旋转：

$$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$$

8.7. 它为什么会出现在傅里叶变换里

傅里叶分析需要不断比较“某个频率的正弦波和余弦波”与原信号有多匹配。

欧拉公式可以把正弦和余弦合并成一个复指数，所以傅里叶公式经常出现类似：

$$e^{-i2\pi ft}$$

其中：

- f 是频率，单位通常是 Hz；
- t 是时间；
- $2\pi ft$ 是随时间不断增加的角度；
- 负号表示在复平面上顺时针旋转。

因此这个复指数可以理解成一个以频率 f 不断旋转的“标准探针”，用来检测原信号中是否包含这个频率。

8.8. DFT

DFT 的全称是 Discrete Fourier Transform，中文是离散傅里叶变换。

它处理的是有限长度的离散数据：

$$x[0], x[1], ..., x[N-1]$$

DFT 把这些时域采样点转换成一组离散的频域结果。

它的公式是：

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i2\pi k \frac{n}{N}}$$

现在不需要背这个公式。先只记住它的意义：

拿一段离散采样数据，分析里面有哪些离散频率成分。

8.9. N、n 与 k

N 表示这次拿来做 DFT 的采样点总数。

例如：

$$x[0], x[1], ..., x[7]$$

一共有 8 个采样点，所以：

$$N = 8$$

n 表示“当前正在处理第几个时域采样点”，因此：

$$n = 0, 1, 2, ..., N-1$$

k 表示“当前正在检查第几个频率格子”，同样有：

$$k = 0, 1, 2, ..., N-1$$

所以可以记成：

- N：总共有多少个采样点；
- n：第几个时间采样点；
- k：第几个频率格子。

8.10. 频率格子

如果采样率是 f_s，那么第 k 个频率格子对应：

$$f_k = k\frac{f_s}{N}$$

相邻两个频率格子的间隔是：

$$\Delta f = \frac{f_s}{N}$$

因为观察总时长：

$$T = \frac{N}{f_s}$$

所以也可以写成：

$$\Delta f = \frac{1}{T}$$

这说明：观察时间越长，频率格子越密，频率分辨率越高。

例如：

$$f_s = 48000 \ \ \text{Hz}$$

如果取 1 秒数据：

$$N = 48000$$

那么：

$$\Delta f = 1 \ \ \text{Hz}$$

所以频率格子可以理解为：0 Hz、1 Hz、2 Hz、3 Hz……

8.11. DFT 如何匹配每个频率

在公式：

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i2\pi k \frac{n}{N}}$$

里，复指数：

$$e^{-i2\pi k \frac{n}{N}}$$

就是第 k 个频率对应的反向旋转探针。

对于固定的 k，DFT 会让 n 从 0 到 $N-1$，把整段时域采样逐点与这个探针相乘，然后全部累加。

因此：

$$X[k]$$

可以理解为“第 k 个频率与整段数据的匹配结果”。

DFT 会让 k 从 0 到 $N-1$ 全部算一遍，所以并不需要事先知道原信号里有哪些频率。

8.12. DFT 的输出是什么

DFT 输入是一个离散时域数列：

$$x[0], x[1], ..., x[N-1]$$

输出也是一个长度为 N 的数列：

$$X[0], X[1], ..., X[N-1]$$

但 $X[k]$ 通常是复数。

每一个 $X[k]$ 对应一个频率格子，并同时包含：

- 这个频率成分的幅度；
- 这个频率成分的相位。

因此可以概括为：

DFT：时域数列 $x[n]$ → 频域复数数列 $X[k]$。

8.13. FFT

FFT 的全称是 Fast Fourier Transform，中文是快速傅里叶变换。

FFT 不是另一种新的傅里叶变换。

它是“快速计算 DFT 的算法”。

直接计算 DFT 大约需要 N^2 量级的工作，而典型 FFT 可以把工作量降到约 $N \log N$。

因此可以记成：

DFT 是数学变换，FFT 是高效计算 DFT 的算法。

8.14. 傅里叶逆变换

傅里叶变换把时域信号拆成不同频率成分：

$$x(t) \to X(f)$$

傅里叶逆变换则把这些频率成分重新叠加，恢复时域信号：

$$X(f) \to x(t)$$

连续傅里叶逆变换为：

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} \, \mathrm{d}f$$

直觉上，$X(f)$ 给出每个频率的幅度和相位，$e^{i2\pi ft}$ 生成该频率的旋转波，最后把所有频率成分叠加起来。

因此可以记成：

- 傅里叶变换：拆频率；
- 傅里叶逆变换：合频率。

8.15. IDFT 与 IFFT

计算机里的离散版本是：

$$x[n] \to X[k]$$

这一步叫 DFT；反方向：

$$X[k] \to x[n]$$

叫 IDFT（Inverse Discrete Fourier Transform，离散傅里叶逆变换）。

对应地：

- FFT：快速计算 DFT；
- IFFT：快速计算 IDFT。

所以计算机里的完整闭环可以写成：

$$x[n]\xrightarrow{\text{DFT / FFT}}X[k]\xrightarrow{\text{IDFT / IFFT}}x[n]$$

理想数学条件下，先做 DFT/FFT，再做 IDFT/IFFT，可以恢复原来的那串离散时域采样值。

这里要注意：

IDFT 恢复的是离散时域 $x[n]$，并不是直接恢复连续模拟信号 $x(t)$。

9. 采样、Nyquist 与混叠

9.1. 从连续信号到离散样本

现实中的模拟信号通常写成 $x(t)$。

ADC 不会保存所有连续时刻，而是按照固定采样率 f_s 读取一串离散值：

$$x[0], x[1], x[2], \dots$$

采样率 f_s 的单位是 Hz，表示“每秒采多少次”。

例如：

$$f_s = 48000 \text{ Hz}$$

表示每秒采 48000 个样本。

采样间隔为：

$$T_s = \frac{1}{f_s}$$

9.2. Nyquist 频率

Nyquist（奈奎斯特）是人名。

对于采样率 f_s，Nyquist 频率定义为：

$$f_N = \frac{f_s}{2}$$

例如：

$$f_s = 48000 \text{ Hz}$$

则：

$$f_N = 24000 \text{ Hz}$$

理想情况下，为了无歧义地表示最高频率为 $f_{\max}$ 的信号，需要满足：

$$f_s > 2f_{\max}$$

可以先记成：

采样率至少要高于最高信号频率的两倍。

9.3. 为什么采样率太低会出问题

如果采样太慢，一个高频波形可能只留下很少几个点。

这些采样点可能和另一个更低频率的波形完全一样。

这时，仅从采样结果已经无法判断原来的真实频率。

9.4. Aliasing：混叠

Aliasing 中文通常叫“混叠”。

它表示：

不同的真实连续频率，在采样后产生了相同或无法区分的离散样本。

例如采样率为：

$$f_s = 8 \text{ Hz}$$

Nyquist 频率为：

$$4 \text{ Hz}$$

一个 7 Hz 的余弦信号在这些采样时刻可能产生和 1 Hz 余弦信号相同的样本。

因此可以直观地理解成：

7 Hz 在采样后“冒充”成了 1 Hz。

混叠通常是坏的，因为一旦发生，原始频率信息可能已经不可逆地丢失。

9.5. 抗混叠滤波器

为了防止超过 Nyquist 频率的成分混叠到低频区域，ADC 前通常会使用低通滤波器。

它的目标是：

- 低频尽量保留；
- 高频逐渐衰减；
- 在采样前尽量压低 Nyquist 频率以上的成分。

这种用途的低通滤波器叫 anti-aliasing filter，也就是抗混叠滤波器。

9.6. RC 低通滤波器

最简单的模拟低通滤波器之一是 RC 电路。

它由电阻 R 和电容 C 组成。

其截止频率为：

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

直觉上：电容对高频更容易导通，因此高频成分更容易被旁路到地，而低频更多地保留在输出端。

如果把这个电路近似为 LTI 系统，那么：

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

在频域则是：

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

低通滤波器的 $H(f)$ 在低频处较大，在高频处较小，所以高频分量会被压低。